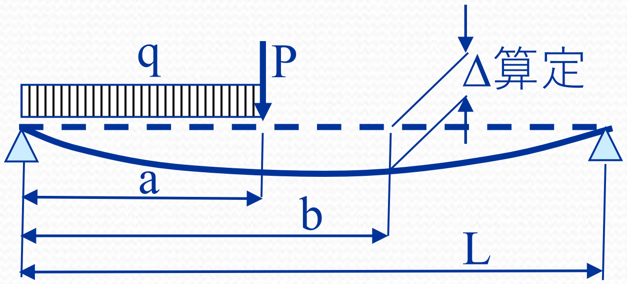
3.1　静定基本系の変形解析

エネルギー理論による釣合評価式から、釣合支配方程式導出。
釣合評価式　→　仕事エネルギー：W=U
全ポテンシャルエネルギー：$\partial\pi=\partial W+\partial U=0$

・１つの集中外力直下での外力作用線方向の変位算出の場合（特殊の場合）
：上評価式のいずれかにより、変位と外力の関係を示す
釣合支配方程式が求められる。

・一般の場合：直接、外力エネルギーを算出出来ない。



Δは外力作用線方向の変位ではないので、外力エネルギーが直接評価出来ない。

こうした一般の場合に適用可能な手法は？

一般の場合は仮想仕事法を適用する

3.2　仮想仕事法

基本原理

外力を受けて釣合状態にある構造力学系に、仮想変位（仮想力）を与えた時、外力のなす仮想仕事（$\overline{W}$）は、内力のなす仮想仕事（$\overline{U}$）に等しい。

仮想変位（仮想力）

実外力、実変位とは全く関係ない以下の３条件のみを満足する物理量

（１）任意に想定（原因は問わない）

（２）系の境界条件（支承条件や接合条件）を満足

（３）零以外の微小値

仮想仕事による構造系釣合い評価式　$\boxed{\overline{W}=\overline{U}}$

解説）

●剛体の場合：$\overline{W}=0$　(U=0が故に）

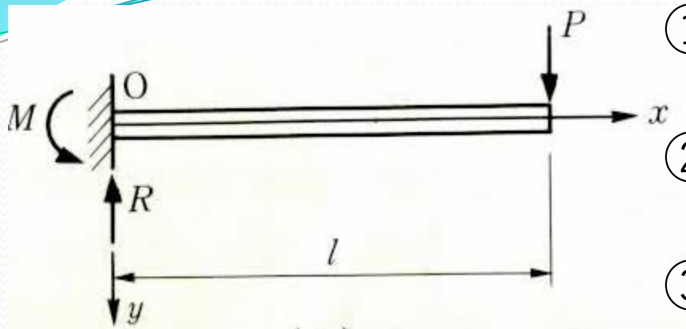
「剛体が外力を受けて釣合の構造系に対し、仮想変位を与えた時、仮想仕事の総和はゼロである。」

●弾性体の場合：$\overline{W}=\overline{U}$

「外力を受けて釣合状態の構造力学系に対し、仮想変位を与えた時、外力のなす仮想仕事＝内力のなす仮想仕事（断面力のなす仮想仕事）である。」

※仮想変位を仮想力としても上記は成立する。

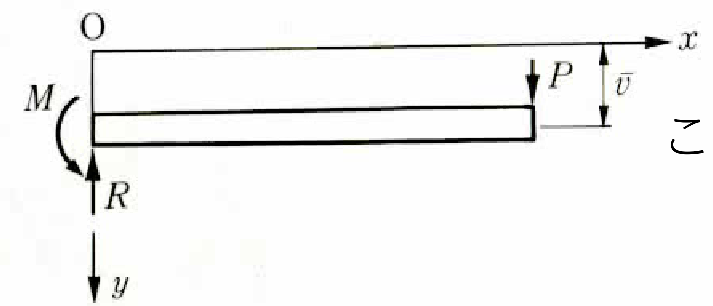
①仮想変位を用いた剛体挙動への適用（支点反力の算出）



(a)

①図(a)の片持ち梁は荷重Pを受け、反力R、Mにより釣合っている。（反力R、M：外力項）

②図(b)のように、仮想変位$\bar{v}$を作用させる。



(b)

③剛体の場合：仮想仕事の総和ゼロ（$\bar{W}=0$）

$$\bar{W}=P\times\bar{v}-R\times\bar{v}=0$$

$$(P-R)\times\bar{v}=0$$

ここで、$\bar{V}\neq0$(仮想仕事の条件）より、

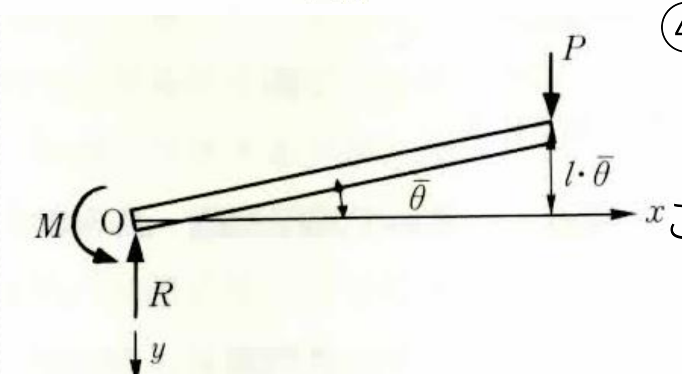
$P-R=0$→釣合い方程式$\sum V=0$に相当

∴ $R=P$→支点反力の算出

④図（C）のように、仮想回転変位$\bar{\theta}$を作用。

$$\bar{W}=P\times\ell\times\bar{\theta}-M\times\bar{\theta}=0$$

$$(P\ell-M)\bar{\theta}=0$$



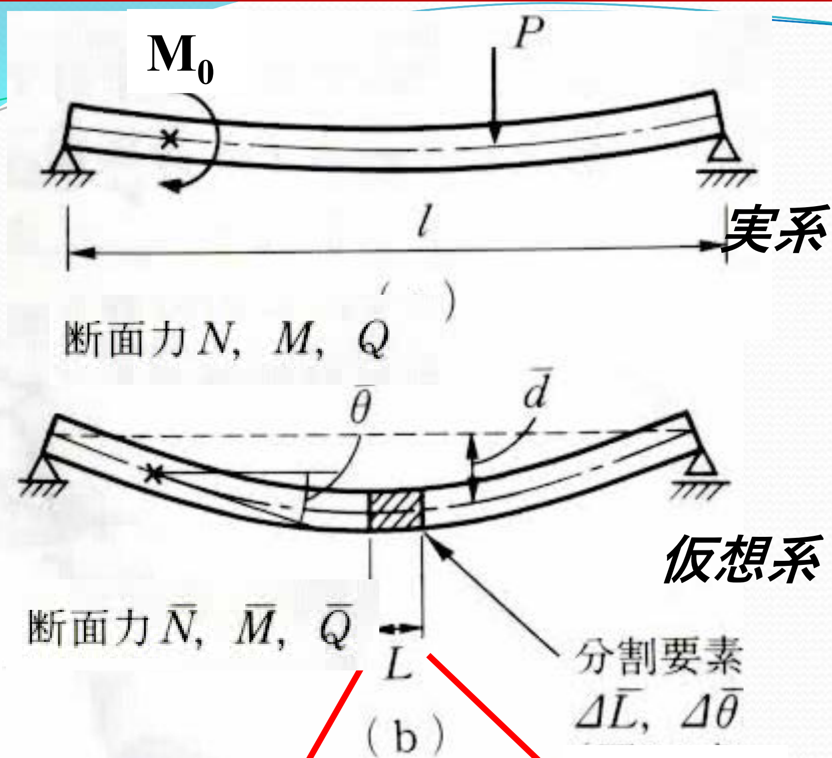
(c)

ここで、$\bar{\theta}\neq0$（仮想仕事の条件）より、

$P\ell-M=0$→釣合い方程式$\sum M=0$に相当

∴ $M=P\ell$ → 支点反力の算出

②弾性体挙動への適用（仮想変位）



●外力のなす仮想仕事（$\bar{W}$）

W＝P× d ＋Mo×θ

※２つの仮想変位の重ね合わせ

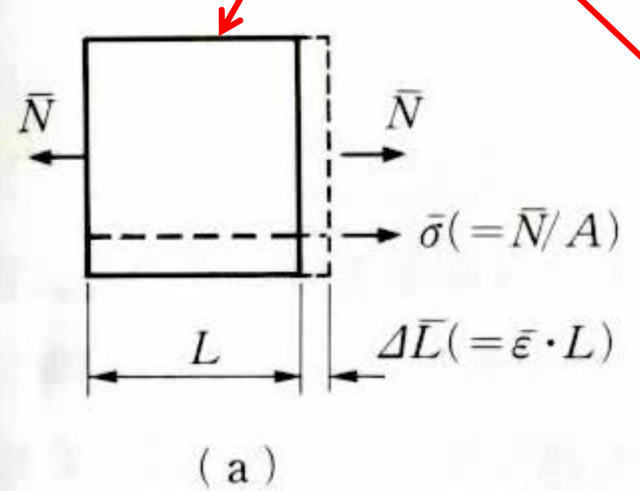
●内力のなす仮想仕事（$\bar{U}$）

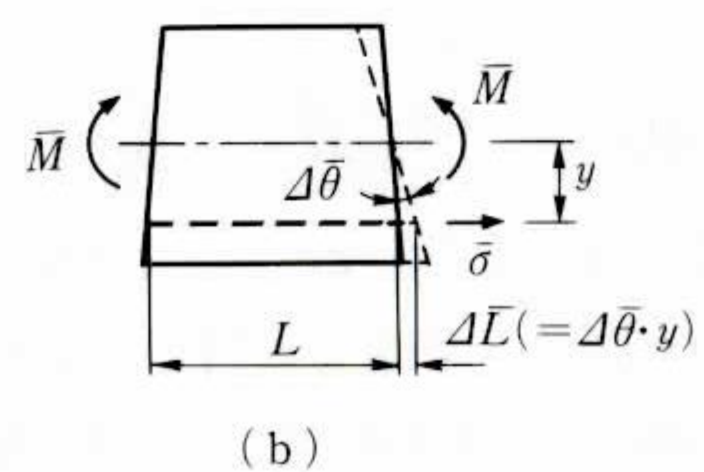
$\bar{U} = N \times \overline{\Delta L} + M \times \overline{\Delta\theta}$　＜要素＞

$= \sum (N \times \overline{\Delta L} + M \times \overline{\Delta\theta})$　＜梁全体＞

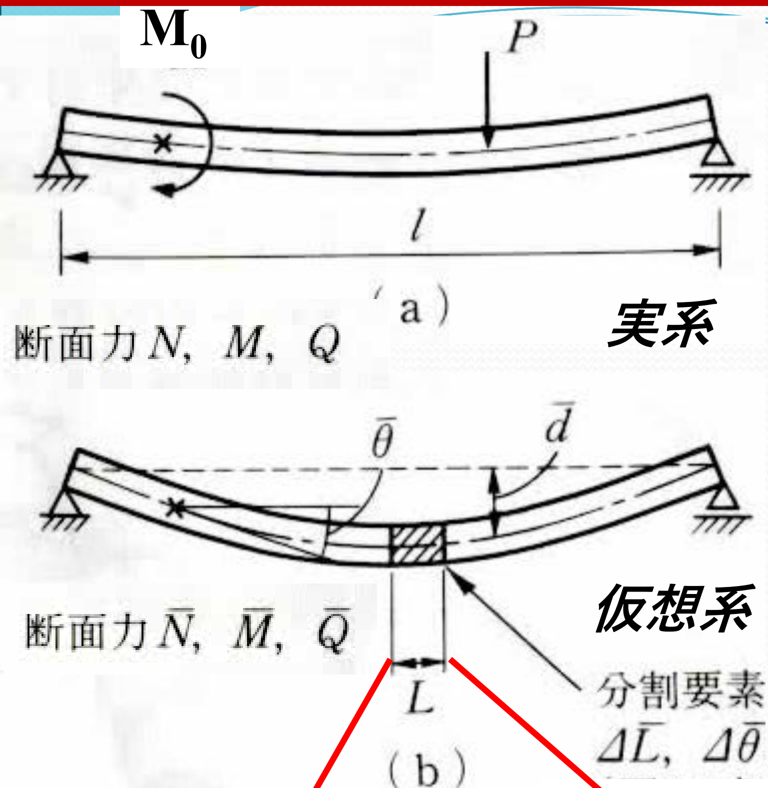
$\bar{W}=\bar{U}$より、

$P\bar{d} + M_0\bar{\theta} = \sum(N\overline{\Delta L} + M\overline{\Delta\theta})$・・・式(1)





②弾性体挙動への適用（仮想変位）続き



①$\bar{⊿L}$と$\bar{N}$の関係式（仮想変位と仮想軸力$\bar{N}$）

$\bar{⊿L}$＝$L\bar{\varepsilon}$＝L（$\bar{\sigma}$/E）＝L（$\bar{N}$/A）/E

∴ $\bar{⊿L}$＝$\bar{N}$L/EA　・・・・・・・・・・・・式(2)

ここで、ε：垂直ひずみ、A：断面積、

E：弾性係数（ヤング率）

ε＝⊿L/L、N＝σ×A、

σ＝ε×E（フックの法則）

②$\bar{⊿\theta}$と$\bar{M}$の関係式(仮想回転と仮想曲げ$\bar{M}$)

$\bar{M}$＝ ∫$\bar{\sigma}$×ydA=∫$\bar{\varepsilon}$ E×ydA

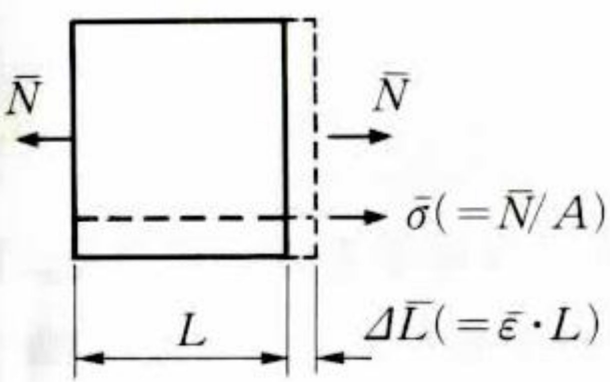
＝E∫($\bar{⊿L}$/L)×ydA ＝ E∫($\bar{⊿\theta}$ y/L)×ydA

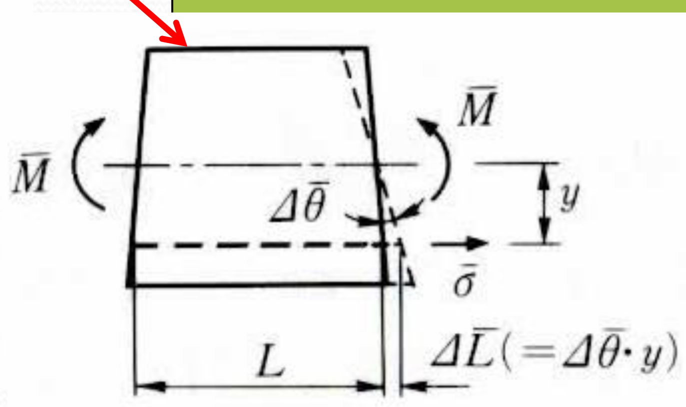
＝ E$\bar{⊿\theta}$/L×∫y²dA ＝EI$\bar{⊿\theta}$／L

∴ $\bar{⊿\theta}$＝$\bar{M}$L／EI・・・・・・・・・・・・・式(3)

ここで、 I：断面2次モーメント

y：中立軸からの距離





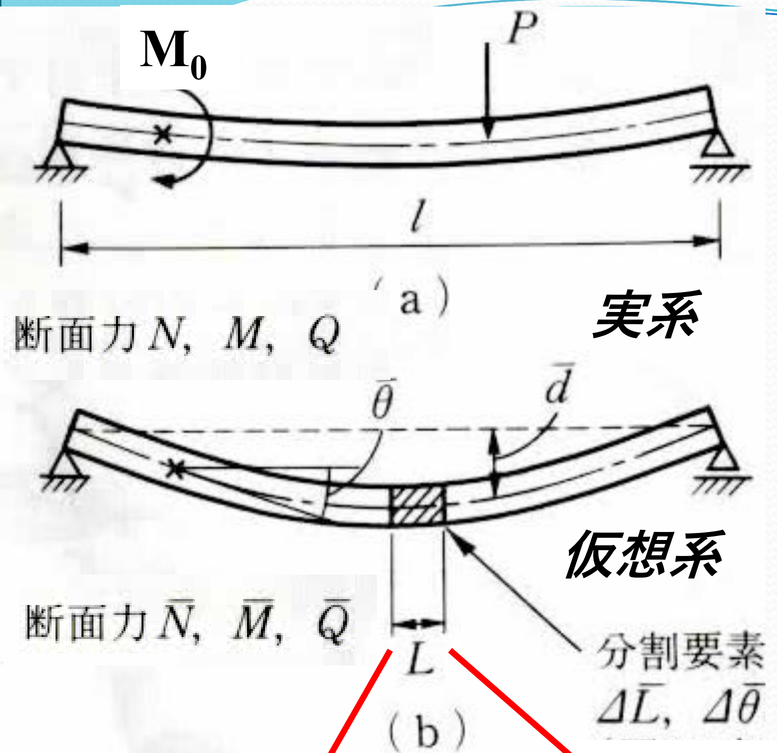
σ=E ε=E y/ ρ

ε＝ y/ ρ

： ρ は曲率半径

ここでは⊿θ/L

②弾性体挙動への適用（仮想変位）続き



式(1)：$P\bar{d}+M_0\bar{\theta}=\sum(N\Delta\bar{L}+M\Delta\bar{\theta})$

式(2)：$\Delta\bar{L}=\bar{N}L/EA$

式(3)：$\Delta\bar{\theta}=\bar{M}L/EI$

より

$$P\bar{d}+M_0\bar{\theta}=\sum N(\bar{N}L/EA)+\sum M(\bar{M}L/EI)$$

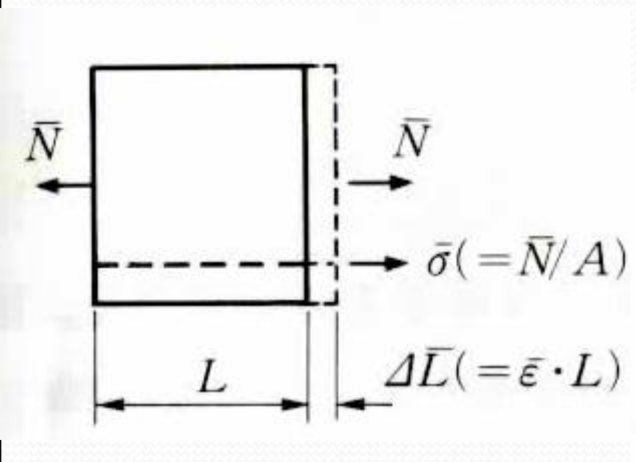
右辺の曲げの項を長さ方向の積分で整理、

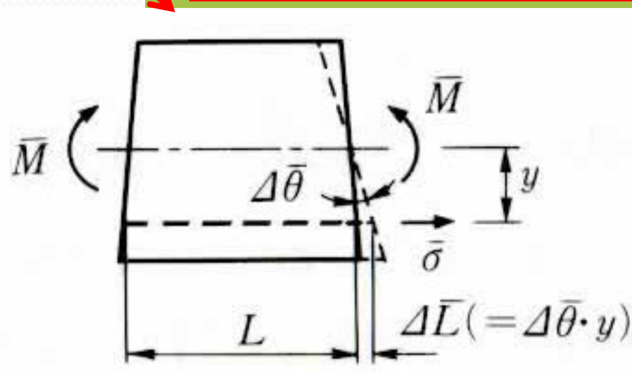
$$P\bar{d}+M_0\bar{\theta}=\sum N(\bar{N}L/EA)+\int M(\bar{M}/EI)dx$$

※上記の右辺は、軸力Nと曲げMが生じる弾性体の仮想仕事法

軸力Nのみ＜トラス＞：$=\sum N(\bar{N}L/EA)$

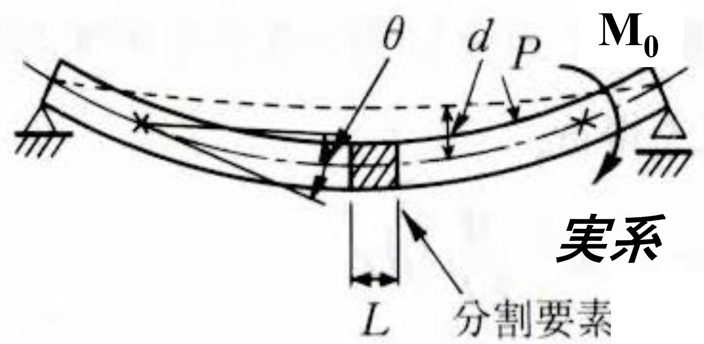
曲げMのみ＜梁＞：$=\int M(\bar{M}/EI)dx$





③弾性体挙動への適用（仮想力）

$$\bar{P}d+\bar{M}_0\theta=\sum(\bar{N}\Delta L+\bar{M}\Delta\theta)$$



断面力 $N,\ M,\ Q$

（ΔL, $\Delta\theta$だけ変形している）

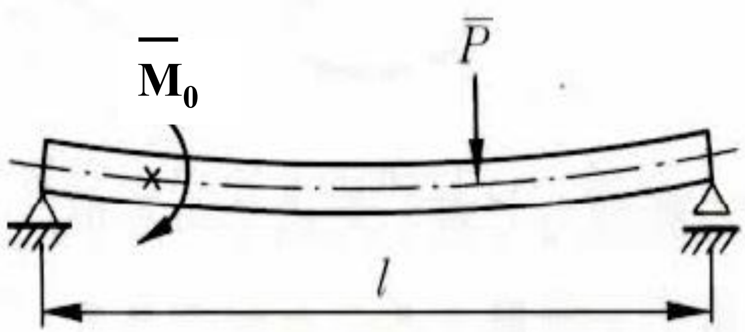
$\Delta L = NL/EA$　：実系

$\Delta\theta = ML／EI$　：実系

より

$$\bar{P}d+\bar{M}_0\theta=\sum N(\bar{N}L/EA)+\sum M(\bar{M}L/EI)$$

右辺を弾性体の長さ方向の積分で整理



仮想系

断面力 $\bar{N},\ \bar{M},\ \bar{Q}$

$$\bar{P}d+\bar{M}_0\theta=\sum\bar{N}(NL/EA)+\int\bar{M}(M/EI)dx$$

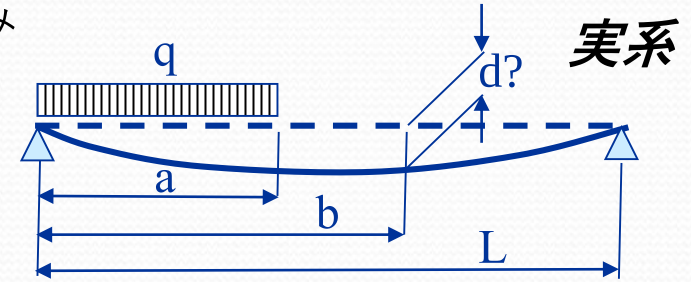
軸力Nのみ＜トラス＞：＝$\sum\bar{N}(NL/EA)$

曲げMのみ＜梁＞　：＝$\int\bar{M}(M/EI)dx$

(3)　単位荷重法

：仮想仕事法を適用した弾性変位の解法（仮想力の適用）

1）右のような単純梁において、着目点のたわみdを求める時の仮想仕事の式は、



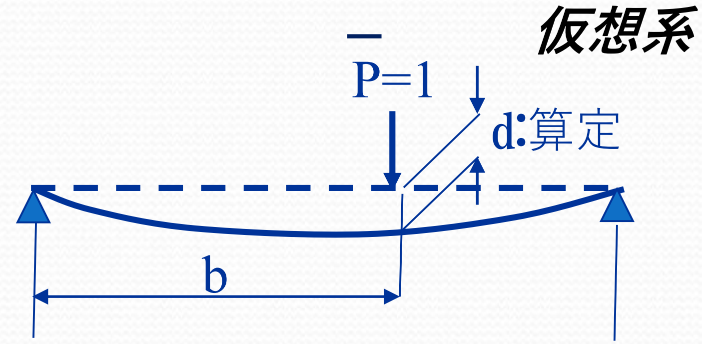
$$\bar{P}d+\bar{M}_0\theta = \int \bar{N}\,(N/EA)\,dx+\int \bar{M}\,(M/EI)dx$$

ここで、

$\bar{P}=1$、$\bar{M}_0=0$、

$\bar{N}=N=0$（鉛直力のみを受ける梁にため）

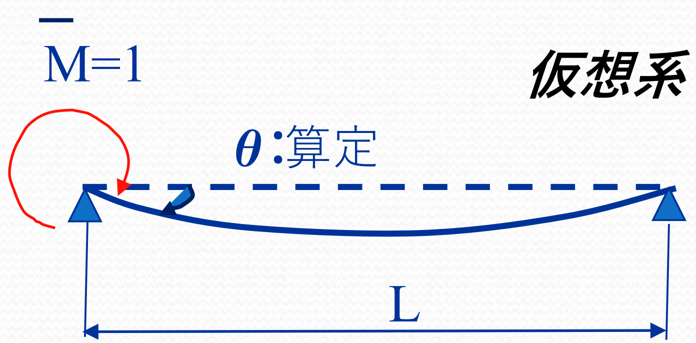
よって、



$$1\times d = \int \bar{M}\,(M/EI)dx$$

$$d = \int \bar{M}\,(M/EI)dx$$

2) 右上のような単純梁において、右下の着目点のたわみ角θを求める仮想仕事の式は

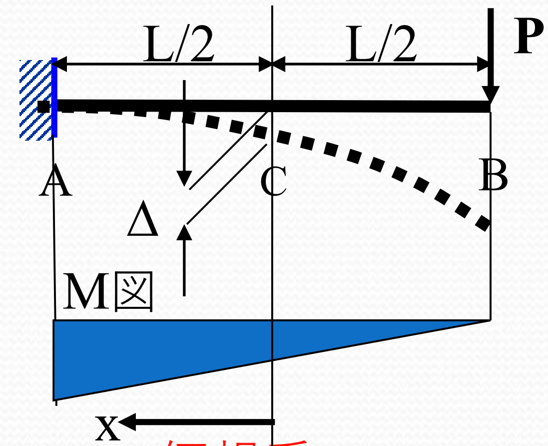


$\bar{P}=0$、$\bar{M}_0=1$、断面力$N=0$

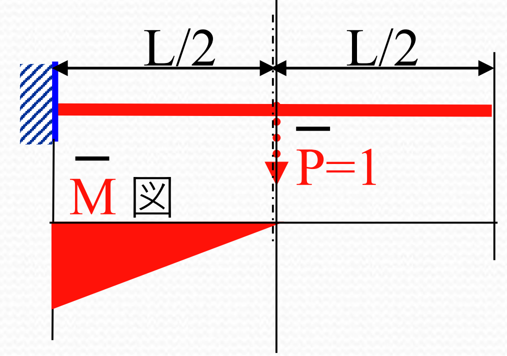
$$\theta = \int \bar{M}\,(M/EI)dx$$

例題：片持ち梁のＣ点の撓みΔを求めよ。

実構造系



仮想系



外力**P**を受けて既に釣合い状態にある片持ち梁の着目点Cで、着目する実変位Δ方向に、仮想外力$\overline{P}=1$を与える。

$$\overline{P}d = \int \overline{N}\,(N/EA)\,dx + \int \overline{M}\,(M/EI)\,dx$$

外力仮想仕事: $\overline{W} = \Delta \times \overline{P}$

$\overline{W} = \Delta \times 1$

内力仮想仕事：$\overline{U} = \int\{M/(EI)\}\overline{M}\,dx$

$\overline{U} = \overline{U}_{CA} + \overline{U}_{BC}$

BC間の$\overline{M}$は零であるから、$\overline{U}_{BC} = 0$

$\therefore \overline{U} = \overline{U}_{CA}$

CA間の曲げモーメント

$M_{CA} = -P(x+L/2)$, $\overline{M} = -1x = -x$

$$\therefore \overline{U} = (P/EI)\int_0^{L/2}(x+L/2)\,x\,dx = 5PL^3/(48EI)$$

釣合条件は、仮想 仕事法による釣合評価$\overline{W}=\overline{U}$より、

$$\therefore \quad \Delta = \{5L^3/(48EI)\}P$$